Über den Widerstand eines elektrisch erwärmten Leiters und die Bestimmung der Wiedemann-Franzschen Zahl

Diesselhorst, Hermann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 1, 1949, S. 14-24

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Über den Widerstand eines elektrisch erwärmten Leiters und die Bestimmung der Wiedemann-Franzschen Zahl

Von **Hermann Diesselhorst**

Summary. Years ago I stated without demonstration a theorem about the resistance of a conductor heated by electric current as the basis of a method for measuring the Wiedemann-Franz-number. Now I give an exposition of the theorem and the theory of the method for measuring.

Die von F. Kohlrausch angegebene Beziehung zwischen Temperatur und Potential eines elektrisch erwärmten Leiters[1]) ist in verschiedener Weise zur Grundlage von Methoden zur Bestimmung der Wiedemann-Franzschen Zahl oder des sogenannten elektrothermischen Leitverhältnisses geworden. Die zuerst von Kohlrausch selbst gegebene Methode benutzte große Stäbe, bei denen die Temperaturverteilung durch Thermoelemente in feinen Bohrungen gemessen werden kann, wie das bei den alten Methoden zur Bestimmung des Wärmeleitvermögens üblich war. Später wurde von mir eine Methode ausgearbeitet[2]), die auf sehr kleine Versuchskörper anwendbar ist. Das hat nicht nur Bedeutung für Materialien, von denen nur kleine und schwer zu bearbeitende Proben verfügbar sind, sondern besitzt außerdem den großen Vorteil, den Einfluß der Wärmeabgabe durch die Oberfläche nach außen so gut wie ganz zu beseitigen, weil dieser Einfluß in dem Maße absinkt, wie die Oberfläche kleiner wird, während die im Inneren elektrisch erzeugte und durch die Elektroden abfließende Wärme bei gleichbleibendem Widerstand und gleicher Belastung ebenso wie die Temperaturerhöhung unverändert bleibt. Die Temperaturerhöhung wird bei dieser Methode nicht durch Thermoelemente gemessen, was bei der Kleinheit des Versuchskörpers nicht ausführbar wäre, sondern der Leiter wird selbst als Widerstandsthermometer benutzt. Das ist möglich auf Grund des Satzes, daß der Widerstand eines elektrisch erwärmten Leiters von beliebiger Gestalt sich von seinem Widerstand bei konstanter Temperatur nur durch einen Faktor unterscheidet, der nicht von der Gestalt, sondern allein von der angelegten Spannung, den Elektrodentemperaturen und dem elektrischen und thermischen Leitvermögen abhängt. Dieser Satz wurde damals ohne Beweis von mir mitgeteilt und benutzt. Da aber später auf diese Methode zurückgegriffen ist[3]) und auch jetzt wegen ihrer guten Brauchbarkeit Interesse dafür besteht, möchte ich die theoretische Begründung der Methode hier zusammenstellen, die sich im Anschluß an die von mir in einer früheren Arbeit[4]) über das Kohlrauschsche Problem gegebenen Entwicklungen leicht ergibt.

Zwar hat Meissner bei seinen oben zitierten umfangreichen Messungen auch theoretische Ausführungen gebracht und dadurch das Resultat präzisiert, aber trotzdem dürfte der Versuch nicht überflüssig sein, die Darstellung übersichtlicher und einfacher zu gestalten. Zugleich soll auch die Näherung weitergeführt werden, um eine Grundlage für die Beurteilung des Geltungsbereichs der Endformel zu gewinnen.

Als Versuchskörper kann ein kurzes dünnes Stäbchen benutzt werden, das mit glatten Endflächen und gutem Kontakt zwischen zwei Kühlbädern angebracht wird, die zugleich als Zuleitungen für den elektrischen Strom dienen. Durch angelegte sehr dünne Thermoelementdrähte aus schlecht wärmeleitenden Metallen (z. B. Constantan und Manganin), die zugleich zur Potentialabnahme benutzt werden, lassen sich zwei Niveauflächen herausgreifen, die für Potential und Temperatur gelten und als Elektroden für das dazwischenliegende Leiterstück betrachtet werden.

Läßt das Material es zu, daß man ein kurzes dickeres Stück benutzt, dem man, um den nötigen Widerstand zu erhalten, in der Mitte eine Einschnürung gibt, so hat dies den Vorteil, daß in den dicken Stabenden die Niveauflächen viel weiter auseinanderliegen als in der Einschnürung, wo der Hauptwiderstand sitzt und die meiste Wärme erzeugt wird. So lassen sich die Thermoelemente für die Messung der Elektrodentemperaturen bequem anbringen. Im übrigen dient diese Temperaturmessung nicht zur Bestimmung der Heizwirkung, aus welcher das gesuchte Leitverhältnis gefunden wird, sondern nur zur Bestimmung der Materialtemperatur, auf welche sich das Meßresultat bezieht. Zur Berechnung dieses Resultats dienen nur Spannungsmessungen, die sich stets exakt ausführen lassen.

I. Widerstand des stromerwärmten Leiters

Der Widerstand ist auf folgende Weise definiert: Die als Elektroden durch Abzweigdrähte herausgegriffenen Potential-Niveauflächen sollen nach der Art, wie Zu- und Abfluß von Wärme und Strom bewirkt sind, zugleich Niveauflächen für die Temperatur sein. Als gegeben werden betrachtet die Temperaturen an den Elektroden und die daran liegende Spannung, ferner Wärmeleitvermögen λ und elektrisches Leitvermögen $\varkappa$ als Funktionen der Temperatur. Gesucht wird als Widerstand der Quotient von Spannung und Strom.

Nach Kohlrausch besteht dann überall im Leiter zwischen Temperatur u und Potential v die Beziehung [5]):

$$\int\limits_c^u p\,du = -\tfrac{1}{2}v^2 + A\,v, \tag{1}$$

wo

$$p = \frac{\lambda}{\varkappa} \tag{2}$$

das sogenannte „Leitverhältnis“ ist und A und c zwei Integrationskonstanten sind, die aus den folgenden Bedingungen an den Elektroden bestimmt werden können:

$$\left.\begin{aligned}&\text{An Elektrode I gilt: Für } v = v_1 \text{ ist } u = u_1.\\ &\text{An Elektrode II gilt: Für } v = v_2 \text{ ist } u = u_2.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Stromdichte im Leiter ist durch das Produkt aus elektrischer Leitfähigkeit und Potentialgefälle gegeben: $\mathfrak{G} = -\varkappa \cdot \operatorname{grad} v$. Durch ein Flächenelement df mit der Normalen n fließt also die Strommenge $\mathfrak{G}_n\,df = -\varkappa\frac{\partial v}{\partial n}\,df$

und den Gesamtstrom erhält man durch Summieren über alle Flächenelemente einer Elektrode oder einer beliebigen anderen Niveaufläche als

$$J = -\int \varkappa \frac{\partial v}{\partial n}\, d f. \tag{4}$$

Für das Potential v als Ortsfunktion besteht bei konstantem Leitvermögen die Poissonsche Differentialgleichung. An deren Stelle tritt hier, wo das von der Temperatur abhängige Leitvermögen nicht konstant ist, die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathfrak{G} = 0$, die besagt, daß die Strömung im Leiter keine Quellen hat, und in Koordinaten lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0. \tag{5}$$

Dazu kommen die gegebenen Werte v_1 und v_2 an den Elektroden und ferner an der freien Oberfläche die Bedingung $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$. Hierdurch ist v als Ortsfunktion eindeutig bestimmt. An Stelle von v können wir nun[6]) das Integral

$$V = \int_{v_1}^{v} \varkappa\, d v \tag{6}$$

als Ortsfunktion einführen. Denn an einer beliebig bestimmten Stelle ist v durch die Kontinuitätsgleichung mit den Grenzbedingungen bestimmt und durch die Kohlrauschsche Beziehung (1) auch u und damit der Wert von $\varkappa$ an dieser Stelle, so daß das Integral (6) ausführbar ist und einen eindeutig bestimmten Wert für V liefert. Es gilt dann für eine beliebige Richtung n die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial n} = \varkappa \frac{\partial v}{\partial n}$ und nach (4):

$$J = -\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d f. \tag{7}$$

Aus (5) findet man dann, daß für V die Poissonsche Gleichung gilt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V = 0.$$

Dazu treten als Grenzbedingungen an den Elektroden:

An I ist $V_1 = 0$ und an II $V_2 = \int_{v_1}^{v_2} \varkappa\, d v$ und für die freie Oberfläche gilt $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$. Hierdurch ist V eindeutig als Ortsfunktion bestimmt.

Endlich führen wir eine Ortsfunktion Φ ein, die ebenfalls der Poissonschen Differentialgleichung genügt, $\nabla^2 \Phi = 0$ und an den Elektroden die Grenzbedingungen erfüllt: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 1$ und an der freien Oberfläche $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$.

Φ ist dann eine eindeutig bestimmte Ortsfunktion, die nur von der Gestalt des Leiterstückes abhängt. Für V hat man dann sofort: $V = \Phi \cdot \int_{v_1}^{v_2} \varkappa\, dv$, da dieser Ausdruck wie Φ der Poissonschen Gleichung genügt und die für V geltenden Grenzbedingungen erfüllt. Damit hat man endlich für den Strom nach (7) den Ausdruck: $J = -\int_{v_1}^{v_2} \varkappa\, dv \cdot \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} df$, wo der erste Faktor von der Gestalt ganz unabhängig ist und deshalb aus dem Integral herausgezogen werden konnte. Für den reziproken Wert des Widerstandes R erhält man so

$$\frac{1}{R} = \frac{J}{v_2 - v_1} = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} \varkappa\, dv \cdot G, \tag{8}$$

wo $G = \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} df$ den reziproken Wert des Widerstandes darstellt, den ein Leiter von derselben Form mit dem konstanten Leitvermögen 1 haben würde. Damit ist der eingangs ausgesprochene Satz bewiesen, daß der Widerstand sich aus zwei Faktoren zusammensetzt, von denen der eine den Widerstand bei konstanter Temperatur darstellt, der andere von der Gestalt unabhängig ist. Gehört zu einer beliebigen konstanten Temperatur u_0 das elektrische Leitvermögen $\varkappa_0$ und der Widerstand R_0, so gilt nach (8): $1/R_0 = \varkappa_0 G$, so daß man durch Eliminieren des Gestaltsfaktors G aus (8) erhält:

$$\frac{R_0}{R} = \frac{1}{\varkappa_0 (v_2 - v_1)} \cdot \int_{v_1}^{v_2} \varkappa\, dv. \tag{9}$$

Zur Auswertung des Integrals tritt die Kohlrauschsche Beziehung (1) mit den zugehörigen Grenzbedingungen (3) hinzu.

II. Anwendung zur Bestimmung des Leitverhältnisses

Wir wollen nun annehmen, daß die beiden Elektroden nahe gleiche Temperatur haben, und nehmen den Mittelwert der beiden Elektrodentemperaturen zum Nullpunkt unserer Temperaturskala, setzen also

$$u_1 = -\tau, \quad u_2 = +\tau. \tag{10}$$

Auf die mittlere Elektrodentemperatur Null beziehen wir auch die Werte R_0 und $\varkappa_0$ in Formel (9). Ferner rechnen wir das Potential vom Mittelwert der Elektrodenpotentiale aus, setzen also

$$v_1 = -v_0, \quad v_2 = +v_0. \tag{11}$$

Die angelegte Elektrodenspannung ist dann $E = 2\,v_0$. Die Widerstandsformel (9) nimmt die Form an:

$$\frac{R_0}{R} = \frac{1}{2\,v_0 \varkappa_0} \int_{-v_0}^{+v_0} \varkappa\, dv, \tag{12}$$

und für die Kohlrauschsche Formel (1) gelten als Grenzbedingungen die Formeln (10) und (11).

Aus (1) erhält man durch Differentiieren nach v:

$$p \frac{du}{dv} = A - v, \tag{13}$$

woraus man die Bedeutung der Konstante A erkennt, nämlich daß u für $v = A$ ein Maximum hat. Bezeichnen wir dieses Temperaturmaximum mit u_m, so muß nach (1) gelten:

$$\int_c^{u_m} p\,du = \frac{1}{2} A^2$$

und weiter nach (1):

$$\int_u^{u_m} p\,du = \frac{1}{2}(v - A)^2. \tag{14}$$

Es handelt sich jetzt darum, aus den in (10) und (11) gegebenen Grenzwerten die Konstanten A und u_m zu finden, dann aus (14) u als Funktion von v zu berechnen, wobei p als unbekannte, aber empirisch bestimmbare Funktion von u eingeht, und schließlich in der Widerstandsformel (12), wo $\varkappa$ als empirisch bekannte Funktion von u gedacht ist, u durch v auszudrücken. Ist dies geschehen, so läßt sich das Integral in (12) auswerten und man kann versuchen, mittels des erhaltenen Resultats einen bestimmten Funktionswert von p aus den Elektrodentemperaturen, der Spannung und den gemessenen Widerständen R und R_0, sowie der besonders meßbaren Temperaturabhängigkeit des Widerstandes zu berechnen.

Gehen wir diesen Weg, so ergibt sich zunächst aus den Grenzbedingungen (10) und (11) durch Einsetzen in (14):

$$\int_{-\tau}^{u_m} p\,du = \frac{1}{2}(v_0 + A)^2 \quad \text{und} \int_{+\tau}^{u_m} p\,du = \frac{1}{2}(v_0 - A)^2 \tag{15}$$

und durch Subtrahieren:

$$\int_{-\tau}^{+\tau} p\,du = 2 v_0 A.$$

Da in dem kleinen Temperaturintervall zwischen $-\tau$ und $+\tau$ das Leitverhältnis p als linear von der Temperatur abhängig angesehen werden kann, gilt

sehr genau: $$A = \frac{p_0 \tau}{v_0}, \tag{16}$$

wo p_0 der Wert von p bei $u = 0$ ist. Bei gleichen Elektrodentemperaturen ($\tau = 0$) ist $A = 0$. Das Temperaturmaximum liegt dann beim Potential Null in der Mitte der Elektrodenpotentiale. A ist also die Verschiebung des Maximumpotentials aus der Mitte, die durch die Ungleichheit der Elektrodentemperaturen bewirkt wird.

Wenn man die beiden Integrale in (15) addiert, so hat man zweimal das große Intervall von 0 bis u_m und die Summe der Integrale über die beiden kleinen Intervalle von $-\tau$ bis 0 und von $+\tau$ bis 0. Da diese beiden Integrale sehr nahe entgegengesetzt gleich sind, kann man ihre Summe gegenüber dem doppelten Integral über das große Intervall vernachlässigen und erhält

recht genau: $$2\int_0^{u_m} p\,du = v_0^2 + A^2, \tag{17}$$

woraus sich bei der Annahme linearer Abhängigkeit des Leitverhältnisses p von u in dem Intervall 0 bis u ergibt

recht genau: $$u_m = \frac{v_0^2 + A^2}{2\,p_{(0,5\,u_m)}}, \tag{17 a}$$

wo $p_{(0,5\,u_m)}$ sich auf die Temperatur $0,5\,u_m$ bezieht.

Endlich erhält man bei der Annahme eines konstanten p-Wertes aus (14)

grob genähert: $$u_m - u = \frac{(v-A)^2}{2\,p_c}, \tag{18}$$

wo p_c konstant.

Wir können den Anspruch an die Genauigkeit dieser Formeln, die bei der Auswertung des Integrals in (12) gebraucht werden sollen, verringern, wenn wir dieses durch die partielle Integration $\int \varkappa\,d v = \varkappa\,v - \int v\,d\varkappa$ umformen. Mit der Bezeichnung

$$\frac{d\varkappa}{d u} = \varkappa' \tag{19}$$

wird nach (13): $d\varkappa = \frac{d\varkappa}{d u}\cdot\frac{d u}{d v}\cdot d v = \frac{\varkappa'}{p}(A-v)\,d v$ und man erhält

$$\int\limits_{-v_0}^{+v_0} \varkappa\,d v = (\varkappa_2 + \varkappa_1)\,v_0 - \int\limits_{-v_0}^{+v_0} \frac{\varkappa'}{p}\,v\,(A-v)\,d v.$$

Da $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sich auf die nahe beieinanderliegenden Temperaturen $-\tau$ und $+\tau$ beziehen, kann ihre Summe gleich dem Doppelten des Wertes bei der Mitteltemperatur Null ($= 2\,\varkappa_0$) gesetzt werden, so daß sich aus (12) ergibt

$$\frac{R_0}{R} = 1 - \frac{1}{2\,\varkappa_0 v_0}\int\limits_{-v_0}^{+v_0} \frac{\varkappa'}{p}\,v\,(A-v)\,d v. \tag{20}$$

A ist der durch Gl. (16) gegebene Wert. Bei Gleichheit der Elektrodentemperaturen ist $A = 0$.

Erste Näherung

Aus (20) erhält man bereits bei der Annahme der Konstanz von $\varkappa'/p$ einen ersten Näherungswert:

$$\frac{R_0}{R} = 1 - \frac{1}{2\,\varkappa_0 v_0}\cdot\frac{\varkappa'}{p}\cdot J_1,$$

wo

$$J_1 = \int\limits_{-v_0}^{+v_0} v\,(A-v)\,d v = -\frac{2}{3}\,v_0^3 \tag{21}$$

unabhängig von A und damit von τ ist. Man findet damit

$$\frac{R_0 - R}{R} = \frac{1}{3}\,\frac{\varkappa'}{\varkappa_0}\,\frac{v_0^2}{p}$$

und hieraus, wenn etwa $\varkappa = \varkappa_0(1 - \alpha u)$, also $\frac{\varkappa'}{\varkappa_0} = -\alpha$ empirisch beobachtet ist,

$$p = \frac{1}{3}\,\alpha\,\frac{R\,v_0^2}{R - R_0}, \tag{22}$$

oder bei Einführung der an den Elektroden liegenden Spannung $E = 2\,v_0$,

$$p = \frac{1}{12}\,\alpha\,\frac{R\,E^2}{R - R_0}, \tag{23}$$

bezogen auf eine mittlere Temperatur im Intervall zwischen Null und u_m.

Den Wert u_m erhält man mit dem aus (22) gefundenem p aus (17a), wo man für erste Näherung noch A^2 gegen v_0^2 vernachlässigen kann. So ergibt sich

grob genähert: $$u_m = \frac{v_0^2}{2\,p} = \frac{3}{2}\,\frac{R - R_0}{\alpha\,R}. \tag{24}$$

Die Formel (23) habe ich bei meinen früheren Probeversuchen, die wegen anderer Arbeiten abgebrochen werden mußten, zur Prüfung der Brauchbarkeit der Methode benutzt. Meissner hat dann bei seinen Messungen die Formel dadurch abgeändert, daß er die Eliminierung des Gestaltsfaktors aus (8) nicht durch R_0, sondern durch eine zweite Widerstandsmessung R' mit anderer Spannung E' ausführte. Man erhält dann anstatt (23)

$$p = \frac{1}{12}\,\alpha\,\frac{R\,E^2 - R'\,E'^2}{R - R'}, \tag{25}$$

woraus wieder (23) hervorgeht, wenn man $E!$ verschwindend klein nimmt.

Der Grund für die Aufstellung der Formel (25) liegt in der Vorstellung, daß in der Bestimmung von R_0 ja eine zweite Widerstandsmessung vorliege und daß dabei die Stromwärme ebenfalls in Betracht komme. Nun muß aber zur Bestimmung des Temperaturkoeffizienten α eine Reihe sorgfältiger Widerstandsmessungen ausgeführt werden, bei denen die Stromwärme freilich zu berücksichtigen ist, wie das im folgenden noch besprochen wird. Wenn man allerdings α aus ungenaueren und dafür in einem sehr großen Temperaturintervall angestellten Messungen gefunden hat, kann sich die Anwendung von Formel (25) empfehlen. Man muß dann aber die zweite Widerstandsmessung sehr sorgfältig bei denselben Elektrodentemperaturen ausführen wie die erste, um nicht einen ebensolchen Fehler hineinzutragen wie durch eine ungenaue R_0-Messung. Weiter muß man sich dann dessen bewußt sein, daß die Formel (25) dadurch eine Ungenauigkeit enthält, daß bei den Messungen mit verschiedener Strombelastung die p-Werte verschiedenen Temperaturen entsprechen, so daß die beiden Messungen bei Ansprüchen an größere Genauigkeit, wie sie bei einer Weiterführung der Näherung zu stellen sind und später noch besprochen werden soll, nicht mehr einwandfrei kombiniert werden dürfen (vgl. Formel 39).

Messung des Temperaturkoeffizienten α

Ein provisorischer Wert des Temperaturkoeffizienten α für die ersten Anwendungen von Formel (23) läßt sich durch gewöhnliche Widerstandsmessungen leicht finden. Aber diese Messungen müssen an dem kleinen Versuchskörper mit sehr kleinem Widerstand ausgeführt werden und sind daher bei der für die Empfindlichkeit maßgebenden Spannung E mit einer so großen Wärmeerzeugung

E^2/R verbunden, daß eine merkliche Temperaturerhöhung des Leiters über die gemessene Elektrodentemperatur kaum zu vermeiden ist. Der gemessene Widerstand bezieht sich daher auf eine mittlere Temperatur, die zu bestimmen ist.

Zu dem Zweck schreiben wir Formel (22) in der Form:

$$\frac{R_0}{R} = 1 - \frac{1}{3}\,\alpha\,\frac{v_0^2}{p} \tag{26}$$

und setzen nach (24) für v_0^2/p als Näherungswert $2\,u_m$ ein. Diese Näherung gibt um so genauere Werte, je kleiner A ist, je besser also die Temperaturen der Elektroden übereinstimmen, und je kleiner u_m selbst ist. Da nun für die Widerstandsmessung die Temperaturerhöhungen längst nicht so groß zu sein brauchen, wie bei der p-Bestimmung, die ja gerade darauf beruht, so ist die Näherung (24) hier recht gut und man erhält aus (26):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0}\left(1 - \alpha\cdot\frac{2}{3}\,u_m\right). \tag{27}$$

Da $-\alpha$ der Temperaturkoeffizient des Leitvermögens, also des reziproken Widerstandes ist, so bedeutet (27), daß der gemessene Widerstand sich auf eine um $\frac{2}{3}\,u_m$ über der Elektrodentemperatur liegende mittlere Temperatur bezieht. Den Wert u_m berechnet man nach (17a) mit einem vorläufigen p-Wert, der aus einem provisorischen α nach (23) oder (25) gefunden werden kann. Sind auf diese Weise durch Verändern der Elektrodentemperatur für eine Reihe von Bezugstemperaturen genaue Widerstandswerte gefunden, so hat man alle für die Hauptmessung erforderlichen Daten.

Zweite Näherung

In der Hauptformel (20) sei jetzt $\varkappa'/p$ linear von der Temperatur abhängig. Wir setzen

$$\frac{\varkappa'}{p} = \left(\frac{\varkappa'}{p}\right)_m (1 + \varepsilon\,(u_m - u)). \tag{28}$$

In dem Integral in (20) steht dann u nur in einem Korrektionsglied und wir setzen daher den Näherungswert nach (18) ein. Wieweit das zulässig ist, soll noch in der dritten Näherung geprüft werden. Wir setzen also

$$\frac{\varkappa'}{p} = \left(\frac{\varkappa'}{p}\right)_m \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\,p_c}(v - A)^2\right) \tag{29}$$

mit konstantem p_c.

Dann ergibt sich aus (20)

$$\frac{R_0}{R} = 1 - \frac{1}{2\,\varkappa_0\,v_0}\left(\frac{\varkappa'}{p}\right)_m\cdot\left(J_1 + \frac{\varepsilon}{2\,p_c}\,J_2\right), \tag{30}$$

wo J_1 das durch (21) gegebene Integral darstellt, und

$$J_2 = \int_{-v_0}^{+v_0} v\,(A - v)^3\,d\,v = -2\left(\frac{1}{5}\,v_0^5 + A^2\,v_0^3\right) = J_1\left(\frac{3}{5}\,v_0^2 + 3\,A^2\right) \tag{31}$$

ist. Aus (30) wird damit

$$\frac{R_0}{R} = 1 + \frac{1}{3\,\varkappa_0}\left(\frac{\varkappa'}{p}\right)_m v_0^2\,(1 + K), \tag{32}$$

wo das Korrektionsglied den Wert

$$K = \frac{\varepsilon}{2\,p_c}\frac{J_2}{J_1} = \frac{3}{10}\,\varepsilon\,\frac{(v_0{}^2 + 5\,A^2)}{p_c} \tag{33}$$

besitzt. In diesem Korrektionsglied ersetzen wir $v_0^2 + A^2$ nach (17a) durch $2\,p_c\,u_m$ und erhalten $K = \frac{3}{5}\,\varepsilon\left(u_m + 2\,\frac{A^2}{p_c}\right)$, wo der zweite Teil noch klein gegen den ersten ist, so daß wir hier durch Verbindung von (16): $A^2 = p_0^2\,\tau^2/v_0^2$ mit der groben Näherung (24): $v_0^2 = 2\,p_c\,u_m$

grob genähert: $$\frac{A^2}{p_c} = \frac{\tau^2}{2\,u_m} \tag{34}$$

setzen können. Damit wird $K = \frac{3}{5}\,\varepsilon\left(u_m + \frac{\tau^2}{u_m}\right)$.

Setzen wir nun $K = \varepsilon\,(u_m - u_b)$, also

$$u_b = \frac{2}{5}\,u_m - \frac{3}{5}\,\frac{\tau^2}{u_m}, \tag{35}$$

so erhält $\left(\frac{\varkappa'}{p}\right)_m$ in (32) den Faktor $\left(1 + \varepsilon\,(u_m - u_b)\right)$, wird also nach (28) zu dem Wert $\left(\frac{\varkappa'}{p}\right)_b$ oder $\frac{\varkappa'_b}{p_b}$, der auf die durch (35) definierte Temperatur u_b bezogen ist.

Somit hat man aus (32) $$\frac{R_0}{R} = 1 + \frac{1}{3\,\varkappa_0}\,\frac{\varkappa'_b}{p_b}\,v_0{}^2 \tag{36}$$

und daraus, wenn wir wieder an Stelle von v_0 die angelegte Spannung $E = 2\,v_0$ einführen und den negativen Temperaturkoeffizienten des Leitvermögens mit

$$\alpha = -\frac{\varkappa'_b}{\varkappa_0} = -\frac{d}{d\,u}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0}\right)_b \tag{37}$$

bezeichnen, die Formel

$$p_b = \frac{1}{12}\,\alpha\,\frac{R\,E^2}{R - R_0} \tag{38}$$

in genauer Übereinstimmung mit (23). Nur die Bezugstemperatur von p und α ist durch (35) genauer festgelegt. Der Wert von u_m in (35) kann aus (17a) entnommen werden, indem man dort den gefundenen Wert p einsetzt. Meist wird sich u_b nur wenig von $\frac{2}{5}\,u_m$ unterscheiden. Hat man z. B. eine maximale Temperaturerhöhung $u_m = 5^0$, so wird ein Temperaturunterschied der Elektroden um 2^0 die Bezugstemperatur erst um $0{,}12^0$ ändern.

Die Bezugstemperatur von $\frac{2}{5}\,u_m$ ist auch von Meissner bei seinen Messungen benutzt, doch ohne daß der Einfluß ungleicher Elektrodentemperaturen berechnet wäre. Die Eliminierung von R durch eine zweite Widerstandsmessung, wie das bei (25) geschehen ist, läßt sich bei Formel (37) nicht ganz einwandfrei durchführen, weil die Bezugstemperaturen bei den beiden Messungen verschieden sind. Wenn man die Größen bei den beiden Messungen durch die Indizes 1 und 2 unterscheidet, so würde man erhalten:

$$p_1 = \frac{1}{12}\,\alpha_1\,\frac{R_1\,E_1{}^2 - \frac{\alpha_2\,p_1}{\alpha_1\,p_2}\,E_2{}^2}{R_1 - R_2}. \tag{39}$$

Je kleiner man E_2 gegen E_1 macht, desto weniger fällt die durch den Faktor $\alpha_2 p_1/\alpha_1 p_2$ bewirkte Ungenauigkeit in Betracht, aber desto ungenauer wird dafür die Messung von R_2.

Dritte Näherung

Um genauer beurteilen zu können, wieweit die Formel (38) mit der Bezugstemperatur u_b zuverlässig ist, wollen wir die Näherung noch einen Schritt weiter führen. Es handelt sich dann darum, in die Formel (28) und damit in die Grundformel (20) für u anstatt des Näherungswertes (18) einen genaueren Wert einzuführen. Wir tun dies, indem wir für p einen linearen Temperaturgang berücksichtigen

$$p = p_m \left(1 + \gamma\,(u - u_m)\right) \tag{40}$$

und in (18) anstatt p den Wert bei der Mitteltemperatur $\frac{u + u_m}{2}$, also

$$p = p_m \left(1 - \frac{1}{2}\gamma\,(u_m - u)\right)$$

nehmen. Man erhält dann genügend genau

$$u_m - u = \frac{(v - A)^2}{2\,p_m}\left(1 + \frac{1}{2}\gamma\,(u_m - u)\right)$$

und indem wir noch rechts in dem Korrektionsglied für $u_m - u$ den Näherungswert (18) einsetzen,

$$u_m - u = \frac{(v - A)^2}{2\,p_m} + \frac{\gamma}{8\,p_m^2}\,(v - A)^4. \tag{41}$$

Damit wird nach (28)

$$\frac{\varkappa'}{p} = \left(\frac{\varkappa'}{p}\right)_m \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\,p_m}\,(v - A)^2 + \frac{\varepsilon\,\gamma}{8\,p_m^2}\,(v - A)^4\right).$$

Anstatt (30) erhält man dann aus (20)

$$\frac{R_0}{R} = 1 - \frac{1}{2\,\varkappa_0\,v_0}\left(\frac{\varkappa'}{p}\right)_m \cdot \left\{J_1 + \frac{\varepsilon}{2\,p_m}\,J_2 + \frac{\varepsilon\,\gamma}{8\,p_m^2}\,J_3\right\}, \tag{42}$$

wo für J_1 und J_2 die alten Werte (21) und (31) gelten und hinzukommt:

$$J_3 = \int_{-v_0}^{+v_0} v\,(A - v)^5\,d\,v = J_1\left(\frac{3}{7}\,v_0^4 + 6\,A^2 v_0^2 + 5\,A^4\right). \tag{43}$$

Damit tritt an Stelle von (32) die Gleichung:

$$\frac{R_0}{R} = 1 + \frac{1}{3\,\varkappa_0}\left(\frac{\varkappa'}{p}\right)_m v_0^2\,(1 + K_1 + K_2), \tag{44}$$

mit

$$K_1 = \frac{\varepsilon}{2\,p_m} \cdot \frac{J_2}{J_1} \quad \text{und} \quad K_2 = \frac{\varepsilon\,\gamma}{8\,p_m^2}\,\frac{J_3}{J_1}.$$

Für unsere Näherung mit Berücksichtigung der ersten Potenz von γ erhält man dann weiter aus (17a)

$$\frac{v_0^2 + A^2}{p_m} = 2\,u_m\left(1 - \frac{1}{2}\,\gamma\,u_m\right)$$

und an Stelle von (34)

$$\frac{A^2}{p_m} = \frac{\tau^2}{2\,u_m}\left(1 + \frac{\tau^2}{4\,u_m^2} - \frac{3}{2}\,\gamma\,u_m\right).$$

Damit ergibt sich nach einfacher Rechnung bei Vernachlässigung von γ^2:

$$K_1 + K_2 = \frac{3}{5}\,\varepsilon\left(u_m + \frac{\tau^2}{u_m} + \frac{\tau^4}{4\,u_m^3} - \frac{1}{7}\,\gamma\,u_m^2\right).$$

Setzen wir diesen Ausdruck wieder $K_1 + K_2 = \varepsilon\,(u_m - u_b)$, also

$$u_b = \frac{2}{5}\,u_m\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{\tau^2}{u_m^2} - \frac{3}{8}\,\frac{\tau^4}{u_m^4} + \frac{3}{14}\,\gamma\,u_m\right), \tag{45}$$

so wird man wieder zu der Formel (38) geführt und es hat sich nichts geändert, als die Bezugstemperatur, die jetzt durch (45) gegeben ist und einen geringen Einfluß der Temperaturabhängigkeit des Leitverhältnisses erkennen läßt.

Zusammenfassung

Für einen Satz über den Widerstand eines elektrisch erwärmten Leiters, der früher von mir ohne Beweis angegeben und zur Grundlage einer Methode zur Bestimmung der Wiedemann-Franzschen Zahl gemacht ist, wird der Beweis und zugleich die Theorie der Meßmethode in übersichtlicher Weise entwickelt.

Literatur

[1]) Kohlrausch, Ann. d. Phys. (4) **1**, 132, 1900.
[2]) Tätigkeitsbericht der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Z. f. Instrumentenkde. **22**, 115, 1902; **23**, 115, 1903.
[3]) W. Meissner, Ann. d. Phys. **47**, 1001, 1915.
[4]) Ann. d. Phys. **1**, 312, 1900.
[5]) Ann. d. Phys. **1**, 315, Formel (6), 1900.
[6]) Ann. d. Phys. **1**, 315, Formel (7), 1900.